21 septembre 2022

. Rappel : à partir de maintenant nous allons étudier les équations différentielles ordinaires de la forme

$x' = f(t,x)$ (ordre 1, sous forme normale, non autonome)

ou $x' = f(x)$ (" , " " , autonome)

1. Résolution des edo linéaires

On considère les edo de la forme

$$a(t).x' + b(t)x = d(t) \quad , t \in I \subset \mathbb{R}$$

hypothèses : on suppose a, b et d continues sur I et que $\boxed{a(t) \neq 0}$ sur I

a. CAS où $d(t) = 0$ partout

Etudions l'edo : $a(t)x' + b(t)x = 0$ (edo linéaire d'ordre 1 homogène (ou sans second membre))

Méthode de résolution :

étape 1 : on divise des 2 côtés par $a(t)$ (on peut car $a(t) \neq 0$ sur I)

on obtient : $x'(t) + \boxed{\frac{b(t)}{a(t)}} x(t) = 0$ (1)

étape 2 :

on multiplie l'équation (1) par $e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$

on obtient : $e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x'(t) + \frac{b(t)}{a(t)} \cdot e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x(t) = 0$ (2)

Remarque : pourquoi fait-on ça :

$F = \int f$

$F' = f$

si on pose pour simplifier $u(t) = \int \frac{b(t)}{a(t)}\,dt$ alors $u'(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$

et donc (2) s'écrit :

$$e^{u(t)} x'(t) + u'(t) \cdot e^{u(t)} \cdot x(t) = 0$$

si on pose $v(t) = e^{u(t)}$ alors $v'(t) = u'(t) e^{u(t)}$

Par conséquent (2) s'écrit :

$$v(t) \cdot x'(t) + v'(t) x(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (v(t) x(t))' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad v(t) x(t) = C \quad \text{où } C \in \mathbb{R} \text{ constante}$$

Par conséquent

$$\boxed{x(t)} = \frac{C}{v(t)} = \frac{C}{e^{u(t)}} = C \cdot e^{-u(t)} = \boxed{C \cdot e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}dt}}$$

Remarque : C est calculé à partir de la condition initiale :

$x(0) = x_0$.

Exercice : résoudre :

① $2x' + 4x = 0$ avec $x(0) = 1$

② $t x' + x = 0$ avec $x(1) = 1$

① Résolution de $2x' + 4x = 0$ avec $x(0) = 1$

étape 1, on divise par 2 : on obtient $x' + \frac{4}{2} x = 0$

$\Leftrightarrow x' + 2x = 0$

étape 2 : on multiplie les 2 membres par $e^{\int 2 dt} = e^{2t}$

ce qui donne $e^{2t} x' + 2 e^{2t} x = 0$

que l'on écrit $(e^{2t} x)' = 0$

$\Leftrightarrow e^{2t} x(t) = C$, $C \in \mathbb{R}$

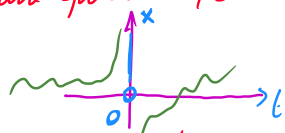
étape 3 : $x(t) = \frac{C}{e^{2t}} = C . e^{-2t}$

étape 4 : comme $x(0) = 1$ on a : $1 = x(0) = C e^{-2.0} = C . e^{0} = C . 1 \Rightarrow \boxed{C = 1}$

Conclusion : $\boxed{x(t) = e^{-2t}}$ et x est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$

② Résolution de $tx' + x = 0$ avec $x(1) = 1$

étape 1 : On divise par t : attention on ne peut le faire que si $t \neq 0$



attention ! on ne peut pas prendre $t \in \mathbb{R}^*$
car x doit être dérivable et donc continue.
On doit donc choisir $t \in]-\infty, 0[$ ou $t \in]0, +\infty[$
la condition initiale est
$x(1) = 1$
$\uparrow$
$\underset{>0}{t=1}$ $\Rightarrow$ par conséquent on choisit $t \in]0, +\infty[$

Soit $t \in]0, +\infty[$, on divise par t :

on obtient $x' + \frac{1}{t} x = 0$ ①

étape 2 : on multiplie par $e^{\int \frac{1}{t} dt}$ or $\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| \overset{t>0}{=} \ln t$

donc $e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln t} = t$

ce qui donne ① $\Leftrightarrow$ $t x' + x = 0$

étape 3 : on reconnaît la dérivée d'un produit : $(t.x)' = 0$

$\Leftrightarrow$ $t x(t) = C$

$\Leftrightarrow$ $x(t) = \frac{C}{t}$, $t > 0$

$t \qquad x(t) = \frac{c}{t} \quad , t>$

étape 4 : comme $x(1) = 1$ on a : $\quad 1 = x(1) = \frac{c}{1} = c$

donc $\boxed{c = 1}$

Conclusion : $\quad x(t) = \frac{1}{t}$ avec $t > 0$

Exercices : résoudre :

① $x' + 5x = 0$ avec $x(0) = 1$ $\quad \longrightarrow \quad X' + 5X = 0$ avec $X(0) = 1$

② $x' + 10x = 0$ " $x(0) = 2$ $\quad \longrightarrow \quad X' + 10X = 0$ avec $X(0) = 2$

③ $x' +$ $\quad \longrightarrow \quad X' + 6X = 0$ avec $X(2) = 5$

④ $X' + tX = 0$ avec $X(1) = 1$

⑤ $3t^2 x' + tx = 0$ avec $x(1) = 1$

⑥ $tx' + 2x = 0$ avec $x(1) = 1$

b. <u>Résolution</u> $a(t)x' + b(t) = d(t)$ (cette fois-ci $d(t) \neq 0$), $t \in I \subset \mathbb{R}$

hypothèses : on suppose a, b et d continues sur I

et $a(t) \neq 0$ sur I

<u>Méthode</u> : <u>étape 1</u> : on divise par $a(t)$

on obtient $x' + \boxed{\dfrac{b(t)}{a(t)}} x = \dfrac{d(t)}{a(t)}$

<u>étape 2</u> :

On multiplie par $e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$ les $\underline{2}$ membres !

On obtient $\underbrace{e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x' + \frac{b(t)}{a(t)} e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} . x}$ $= e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \dfrac{d(t)}{a(t)}$ (1)

<u>étape 3</u> : (1) $\Leftrightarrow$ $\left(e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} . x \right)' = e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \dfrac{d(t)}{a(t)}$

$\Leftrightarrow e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x(t) = \int e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \dfrac{d(t)}{a(t)} dt + C$, $C \in \mathbb{R}$

ne pas oublier la constante

Conclusion : $(t) \quad e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \left(\int e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \dfrac{d(t)}{a(t)} dt + C \right)$

$$x(t) = e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \left(\int e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \frac{d(t)}{a(t)} dt + c \right)$$ constante

Exemple : (1) calculer $2x' + 4x = 1$ avec $x(0) = 1$.

(2) calculer $t x' + x = 2$ avec $x(1) = 1$

(1) étape 1 : on divise par 2

on obtient $x' + 2x = \frac{1}{2}$

$$x' + 2x = \frac{1}{2}$$

étape 2 : on multiplie par $e^{\int 2\,dt} = e^{2t}$

ce qui nous donne $\underbrace{e^{2t}x' + 2e^{2t}x}_{(e^{2t}x)'} = \frac{1}{2}e^{2t}$

$$(e^{2t}x)' = \frac{1}{2}e^{2t}$$

étape 3 : Par conséquent $e^{2t}x = \int \frac{1}{2}e^{2t}dt + C$

$$= \frac{1}{2}\int e^{2t}dt + C$$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^{2t}}{2} + C = \frac{1}{4}e^{2t} + C$$

Conclusion $x(t) = e^{-2t}\left(\frac{1}{4}e^{2t} + C\right)$

$$\boxed{x(t)} = \frac{1}{4}\cancel{e^{-2t}}\cancel{e^{2t}} + Ce^{-2t} = \frac{1}{4} + Ce^{-2t} = \boxed{\frac{1}{4} + \frac{C}{e^{2t}}}$$

comme $x(0) = 1$ on a $1 = x(0) = \frac{1}{4} + \frac{C}{e^0} = \frac{1}{4} + C$

donc $C = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Finalement $x(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4e^{2t}} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{e^{2t}}\right)$

Exercices : résoudre :

(1) $x'+5x=0$ avec $x(0)=1$ $\longrightarrow$ $X'+5X=0$ avec $X(0)=1$

(2) $x'+10x=0$ " $x(0)=2$ $\longrightarrow$ $X'+10X=0$ avec $X(0)=2$

(3) $x'+$ $\longrightarrow$ $X'+6X=0$ avec $X(2)=5$

(4) $X'+tX=0$ avec $x(1)=1$

(5) $3t^2x'+tx=0$ avec $x(1)=1$

(6) $tx'+2x=0$ avec $x(1)=1$

12 octobre 2022

Solutions

(1) $X'+5X=0$ avec $X(\underset{t_0=0}{0})=1$

Soit $t\in I\subset\mathbb{R}$ avec $0\in I$

Etape 1 : on multiplie l'équation par $e^{\int 5dt}=e^{5t}$

Etape 2 : on obtient : $(e^{5t}x(t))'=0$

Etape 3 : on intègre les 2 membres : $e^{5t}x(t)=c$, $c\in\mathbb{R}$

d'où $x(t)=ce^{-5t}$

avec $x(0) = 1$ donc $\boxed{1} = C.e^{-0} \boxed{= C}$

Conclusion : $t \mapsto x(t) = \frac{1}{e^{5t}}$ est la solution du problème, avec $t \in \mathbb{R}$

② $x' + 10x = 0$ avec $x(0) = 2$

Soit $t \in I \subset \mathbb{R}$ avec $0 \in I$

On multiplie par $e^{\int 10 dt} = e^{10t}$

On obtient alors $(e^{10t} x(t))' = 0$ ce qui donne $e^{10t} x(t) = C$, $C \in \mathbb{R}$

d'où $x(t) = Ce^{-10t}$

et comme $x(0) = 2$, $\boxed{2 =} C.e^0 = \boxed{C}$

Conclusion : $t \mapsto 2e^{-10t}$ pour $t \in \mathbb{R}$ est la solution du problème.

③ $x' + 6x = 0$ avec $x(2) = 5$, avec $t \in I \subset \mathbb{R}$, et $2 \in I$

On multiplie par $e^{\int 6 dt} = e^{6t}$

On obtient $(e^{6t} x(t))' = 0$ ce qui donne $e^{6t} x(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$, d'où $x(t) = ce^{-6t}$

avec $x(2) = 5$ càd $5 = ce^{-6.2} = ce^{-12} = \frac{c}{e^{12}}$

donc $c = 5e^{12}$

Conclusion $t \mapsto 5e^{12} e^{-6t} = 5e^{12-6t}$, $t \in \mathbb{R}$ est solution du problème

④ $x' + tx = 0$ $x(1) = 1$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ avec $1 \in I$

On multiplie chaque membre de l'équation par $e^{\int t dt} = e^{t^2/2}$

Ce qui donne $(e^{t^2/2} . x(t))' = 0$

Soit $e^{t^2/2} x(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$

et donc $x(t) = c e^{-t^2/2}$ comme $x(1) = 1$, on a : $1 = c.e^{-1^2/2} = \frac{c}{e^{1/2}}$

donc $c = e^{1/2}$

Conclusion $t \mapsto e^{1/2} e^{-t^2/2} = e^{(1-t^2)/2}$, avec $t \in \mathbb{R}$ est solution du problème

⑤ $3t^2 x' + tx = 0$ $x(1) = 1$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, avec $1 \in I$

On divise par $3t^2$: donc il faut s'assurer que $0 \notin I$ mais $1 \in I$, donc $I \subset]0, +\infty[$

On obtient $x' + \frac{t}{3t^2} x = 0$

ce qui donne : $x' + \frac{1}{3t} x = 0$

$\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| = \begin{cases} \ln t & \text{si } t > 0 \\ \ln(-t) & \text{si } t < 0 \end{cases}$ $t \in]0, +\infty[$

On multiplie chacun des membres par $e^{\int \frac{1}{3t} dt} = e^{\frac{1}{3} \int \frac{1}{t} dt} = e^{\frac{1}{3} \ln|t|} = e^{\frac{1}{3} \ln t}$

On multiplie chacun des membres par $e^{\int \frac{1}{3t}dt} = e^{\frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt} = e^{\frac{1}{3}\ln|t|} \underset{t>0}{=} (e^{\ln t})^{1/3} = t^{1/3}$

$e^{\ln t} = t$

On obtient $\left(t^{1/3} \cdot x(t)\right)' = 0$

Soit $t^{1/3} x(t) = C,\ C\in\mathbb{R}$, donc $x(t) = C t^{-1/3} = \frac{C}{t^{1/3}}$

comme $x(1) = 1$ on a : $1 = C \cdot 1^{-1/3} = \frac{C}{1^{1/3}} = C$ donc $\boxed{C=1}$

Conclusion $t \mapsto t^{-1/3} = \frac{1}{t^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$, avec $t>0$ est solution du problème

(6) $tx' + 2x = 0 \quad x(+1) = 1 \quad, t \in I \subset \mathbb{R}$ avec $+1 \in I$

On divise par t, pour ça, il faut que $0 \notin I$ et comme $1 \in I$, il faut que $I \subset]0,+\infty[$

On obtient $x' + \frac{2}{t}x = 0$

On multiplie par $e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\int \frac{1}{t}dt} = e^{2\ln|t|} \underset{t>0}{=} e^{2\ln t} = (e^{\ln t})^2 = t^2$

On obtient $\left(t^2 x(t)\right)' = 0$ soit $t^2 x(t) = C,\ C\in\mathbb{R}$

d'où $x(t) = \frac{C}{t^2}$, $t \in I \subset]0,+\infty[$

Comme $x(1) = 1$ on a $1 = \frac{C}{1^2} = C$

Conclusion $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ avec $t \in]0,+\infty[$ est la solution du problème

Si $x(-1) = 1$!!

$tx' + 2x = 0 \quad x(-1) = 1 \quad t \in I \subset \mathbb{R}$, avec $-1 \in I$

On divise par t, pour ça il faut que $0 \notin I$ et comme $-1 \in I$, il faut que $I \subset]-\infty,0[$

$5 = -(-5)$

ex: $|-5| = 5$

On obtient $x' + \frac{2}{t}x = 0$

$t<0$, donc $|t| = -t$

- On multiplie par $e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\int \frac{1}{t}dt} = e^{2\ln|t|} = e^{2\ln(-t)} = \left(e^{\ln(-t)}\right)^2 = \begin{cases} \cancel{-t^2} \\ \text{ou } (-t)^2 = t^2 \end{cases}$???

$(-t)^2 = (-t)(-t)$

On obtient :

- $\cancel{\left(-t^2 x(t)\right)' = 0}$

c.à.d $\cancel{-t^2 x(t) = C},\ C\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \cancel{x(t) = \frac{C}{-t^2}}$ et comme $x(-1) = 1$ on a : $1 = \frac{C}{-(-1)^2} = -C$ donc $C = -1$

Conclusion $x(t) = \frac{-1}{-t^2} = \frac{1}{t^2}$, $t<0$

- $\left(t^2 x(t)\right)' = 0 \Leftrightarrow t^2 x(t) = C$

$\Leftrightarrow x(t) = \frac{C}{t^2}$ comme $x(-1) = 1$ on a : $1 = \frac{C}{(-1)^2}$ donc $C = 1$

donc $x(t) = \frac{1}{t^2}$, $t<0$

Exercice : $tx'+x=2$, $x(1)=1$, $t\in I\subset\mathbb{R}$, avec $1\in I$

On divise par t, pour ça il faut que $0\notin I$ et comme $1\in I$, $I\subset]0,+\infty[$

On obtient $x'+\frac{1}{t}x=\frac{2}{t}$

On multiplie par $e^{\int\frac{1}{t}dt}=e^{\ln|t|}\overset{t>0\ |t|=t}{=}e^{\ln t}=t$

On obtient $(t.x(t))'=\frac{2}{\cancel{t}}$

On intègre les 2 membres : $tx(t)=\int\frac{2}{\cancel{t}}dt+C$ or $\int\frac{2}{\cancel{t}}dt=2\int\cancel{\frac{1}{t}}dt=\cancel{2\ln|t|}$ $=2\cancel{\ln t}$, car $t>0$; $2\int dt$; $=2t$

$$t\,x(t)=2.t+C$$

et donc $x(t)=2.+\frac{C}{t}$, $t>0$

comme $x(1)=1$ on a $1=2.+\frac{C}{1}$ or $\ln 1=0$

$$C=-1$$

$t^{-1}\to -1t^{-2}$

$\left(\frac{1}{t}\right)'=-1/t^2$

Conclusion $t\mapsto\boxed{2-1/t}$ est solution du problème

$tx'+x=2$ ici $x=2-1/t$

$x'=-\left(-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{1}{t^2}$

~~t.x'+x=2~~

$t.\frac{1}{t^2}+2-\frac{1}{t}=\frac{1}{t}+2-\frac{1}{t}=2$ ok

Exercice : Résoudre $tx'+x=3$ avec $x(-1)=1$

Resolution de (E) $tx'+x=3$, où $t\in I\subset\mathbb{R}$
avec $-1\in I$ et $x(-1)=1$

Pour ça, on divise par t sous reserve que $I\subset]-\infty,0[$ (car $t\neq0$ et $-1\in I$)

On obtient alors $x'+\frac{1}{t}x=\frac{3}{t}$ (1) $t<0$

On multiplie ensuite par $e^{\int\frac{1}{t}dt}=e^{\ln|t|}=|t|=-t$ les membres de (1)

on obtient $(-t.x(t))'=-t.\frac{3}{t}$
$=-3$

et on intègre des 2 côtés, pour avoir :

$$-tx(t)=-3t+C$$

$\Leftrightarrow$ $x(t)=\frac{-3t}{-t}+\frac{C}{-t}$ (car $t\in I\subset]-\infty,0[$ $(t\neq0)$)

$\Leftrightarrow$ $x(t)=3-\frac{C}{t}$

Cherchons c t.q. $x(-1)=1$ $x(-1)=1=3-\frac{C}{(-1)}=3+C$

donc

donc $3+C=1 \Leftrightarrow C=-2$

Conclusion $x(t) = 3+\frac{2}{t}$ est la solution du problème avec $t \in]-\infty, 0[= I$

Exercice : on considère le modèle à effet Allee :

$$x' = x(1-x)(x-M) \quad \text{avec} \quad 0 \leq M \leq 1$$

On peut l'écrire $x' = f(x)$ où $f : x \mapsto f(x) = x(1-x)(x-M)$

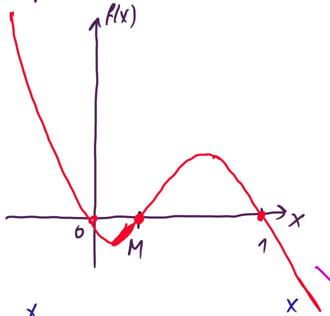
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(1-x)(x-M) = 0$

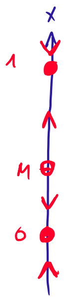
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = M$

$= -x^3 + .. x^2 + x + ..$

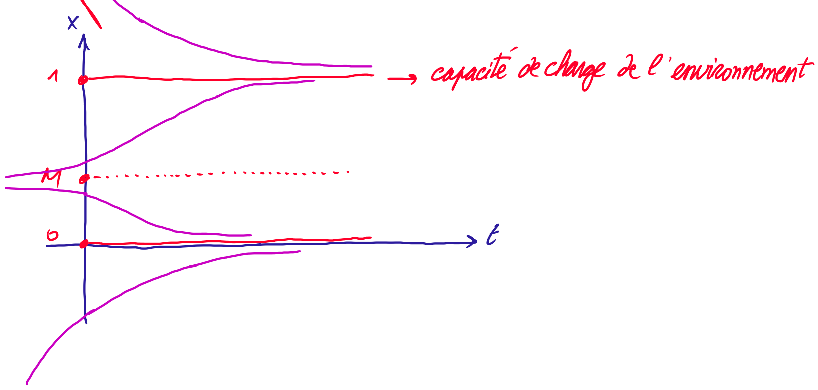
$\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$





portrait de phase



Exercice : Etude des équilibres et de leur stabilité de

$$x' = (1-x)^2 (x-2)(x+5)$$

Dessiner quelques trajectoires représentatives.

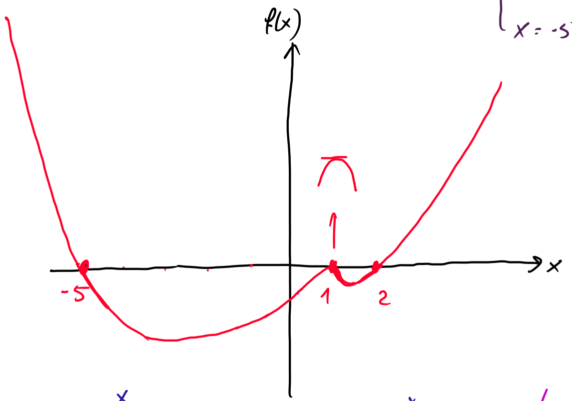
Recherche des équilibres : on pose $f(x) = (1-x)^2 (x-2)(x+5)$

les équilibres vérifient $x' = 0$ c.à.d $f(x)$

les equilibres verifient $x' = 0$ càd $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow (1-x)^2 (x-2)(x+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^2 = 0 \Leftrightarrow 1-x=0 \\ \text{ou} \\ x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \text{ou} \\ x+5=0 \Leftrightarrow x=-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = -5 \end{cases}$



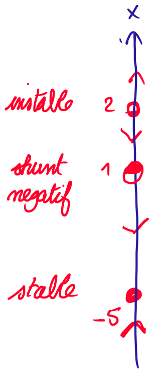
$f(x) = (1-x)^2 (x-2)(x+5)$

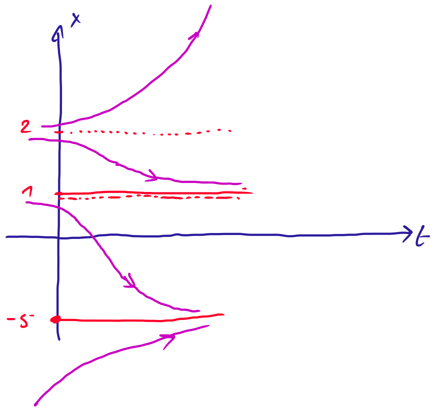
$= (1-2x+x^2)(x-2)(x+5)$

$= 1x^4 + .. x^3 + .. x^2 + ... x + ..$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^4 = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^4 = +\infty$





Exercice : même question avec $x' = (x-3)^3(x-1)x^2$

On pose $f(x) = (x-3)^3(x-1)x^2$

Les équilibres vérifient $x'=0$ càd $f(x)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^3(x-1)x^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \\ x=0 \end{cases}$

Il y a 3 équilibres.

On a un polynôme de degré 6

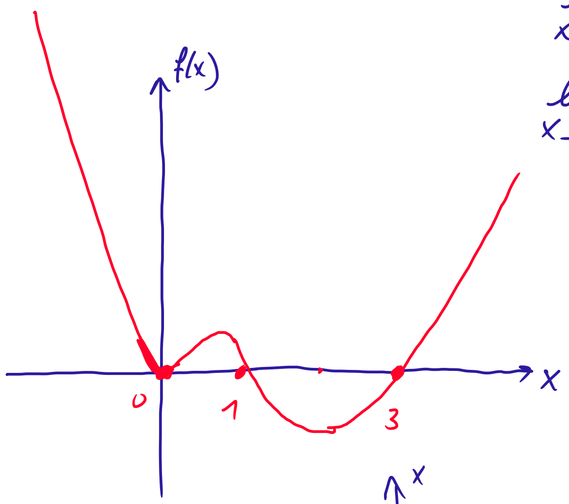
$\underbrace{(x-3)^3}_{}(x-1)x^2$

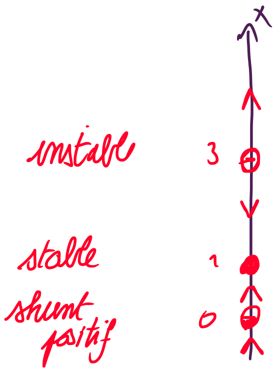
$(x^3+\dots)(x-\dots)x^2 = x^6+$

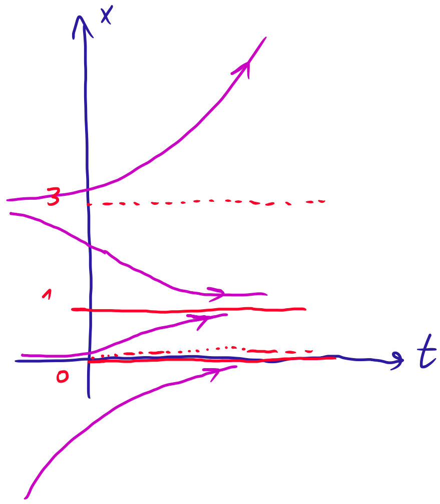
$(x^3+\ldots)(x\cdots)x^2 = x^6+\cdots$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^6 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^6 = +\infty$

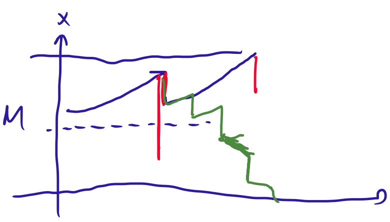






Exercice : $x' = x(1-x)(x-M) - Ex$ $\quad 0 \leq M \leq 1$, $E \geq 0$

modèle à effet Allee avec exploitation.



On pose $f(x) = x(1-x)(x-M) - Ex$

Les equilibres verifient

$x'=0$ c'est à dire $f(x)=0$

$$\Leftrightarrow x(1-x)(x-M) - Ex = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left((1-x)(x-M) - E\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (1-x)(x-M) - E = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - M - x^2 + xM - E = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x(M+1) + E + M = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x(M+1) + E + M = 0$$

de la forme $ax^2 + bx + c = 0$

avec $a = 1$

$b = -(M+1)$

$c = E+M$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-(M+1))^2 - 4\cdot(E+M)$$
$$= (M+1)^2 - 4(E+M)$$
$$= M^2 + 2M + 1 - 4E - 4M = M^2 - 2M + 1 - 4E$$
$$= (M-1)^2 - 4E$$
$$A^2 - B^2$$

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (M-1)^2 \geq 4E \geq 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{(M-1)^2}{4} \geq E}$ au moins 1 equilibre de plus

$\Delta < 0 \quad E > \frac{(M-1)^2}{4}$ aucun autre équilibre que 0

autre méthode $x' = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x(1-x)(x-M) - Ex = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x(1-x)(x-M)}_{g(x)} = \underbrace{Ex}_{h(x)}$